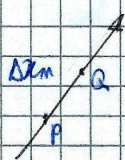


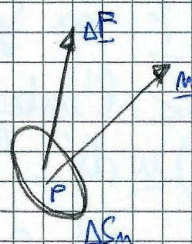
La dualità e l'identità dei lavori virtuali (ILV)

La dualità tra deformazione e tensione consiste nell'identificare procedimenti matematici con cui le abbiamo definite:



$$\begin{aligned} \underline{e}_m &= \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_m} = \frac{\Delta u}{\Delta x_m} \\ &= \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_m} = \underline{u} \times \underline{m} \end{aligned}$$

$$\underline{e}_m = \underline{F} \cdot \underline{m}$$

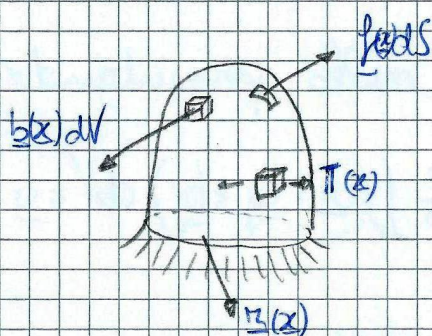


$$\underline{e}_m = \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x_m}$$

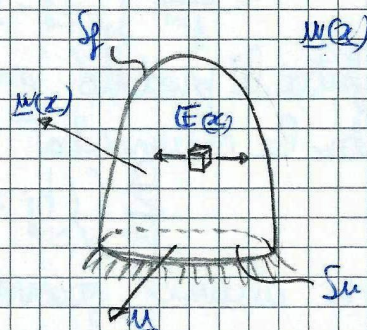
$$\underline{e}_m = \underline{\pi} \cdot \underline{m}$$

Con $\underline{E}$ e $\underline{\pi}$ tensori simmetrici del secondo ordine. L'identità dei lavori virtuali è la massima espressione di tale dualità tra deformazione e tensione. È una conseguenza delle equazioni già studiate, non aggiunge ad esse e quindi non per mette il calcolo di incognite. Consideriamo due sistemi:

SISTEMA FORZE-TENSIONI
EQUILIBRATE



SISTEMA SPOSTAMENTI-DEFORMAZIONI
CONGRUENTI



Non esiste alcuna relazione di causa-effetto tra i due sistemi.

L'identità dei lavori virtuali afferma: "Dato un corpo ed assegnati un sistema di forze equilibrate con un campo di tensioni, insieme ad un campo di spostamenti congruenti con un campo di deformazioni, il lavoro virtuale esterno compiuto dalle forze negli spostamenti eguaglia il lavoro virtuale interno compiuto dalle tensioni nelle deformazioni". In formula:

$$\int_V \underline{b} \cdot \underline{u} \, dV + \int_{S_f} \underline{f} \cdot \underline{u} \, dS + \int_{S_u} \underline{v} \cdot \underline{u} \, dS = \sum_{j=1}^3 \int_V \underline{b}_j \cdot \underline{e}_j \, dV$$

$$\Rightarrow \delta L_e = \delta L_i$$

Dimostriamo. Per la congruenza degli spostamenti:

$$\underline{u}_j = \underline{e}_j + \underline{\omega} \times \underline{a}_j \quad \text{in } V \quad \underline{u} = \underline{\omega} \times \underline{a}$$

Per l'equilibrio delle forze:

$$\sum_{j=1}^3 t_{ij} + \underline{b} = \underline{0} \text{ in } V \text{ (traslazione)} \quad \sum_{j=1}^3 a_j \times \underline{b}_j = \underline{0} \text{ in } V \text{ (rotazione)}$$

Quindi:

$$\sum_{j=1}^3 t_{ij} m_j = \underline{f} \text{ su } S_f \quad \sum_{j=1}^3 b_j m_j = \underline{r} \text{ su } S_u$$

Per il lavoro esterno l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \delta L_e &= \int_V \left(- \sum_{j=1}^3 t_{ij} \right) \underline{u} \, dV + \int_{S_u \cup S_f} \left(\sum_{j=1}^3 t_{ij} m_j \right) \cdot \underline{u} \, dS = \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[- \int_V t_{ij} \cdot \underline{u} \, dV + \int_S t_{ij} \cdot \underline{u} \, m_j \, dS \right] \end{aligned}$$

Per il lemma di Gauss:

$$\int_V f_{ij} \, dV = \int_S f \, m_j \, dS$$

Con S frontiera di V avente normale uscente $\underline{n}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta L_e &= \sum_{j=1}^3 \left[- \int_V t_{ij} \cdot \underline{u} \, dV + \int_S (b_j \cdot \underline{u})_{,j} \, dV \right] = \sum_{j=1}^3 \left[- \int_V t_{ij} \cdot \underline{u} \, dV + \int_V b_j \cdot \underline{u} \, dV + \int_V b_j \cdot \underline{u}_{,j} \, dV \right] = \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_V (b_j \cdot \underline{u}_{,j}) \, dV = \sum_{j=1}^3 \int_V (b_j \cdot \underline{e}_j + \underline{b}_j \cdot \underline{u} \times \underline{a}_j) \, dV = \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_V t_{ij} \cdot \underline{e}_j \, dV = \delta L_i \end{aligned}$$

Infatti il prodotto misto diventa nullo permutando i termini, data la reciprocità:

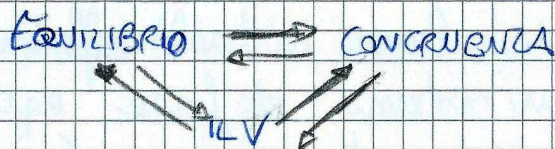
$$\sum_{j=1}^3 \int_V (b_j \cdot \underline{u} \times \underline{a}_j) \, dV = \sum_{j=1}^3 \int_V (\underline{u} \cdot \underline{a}_j \times \underline{b}_j) \, dV = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Ecco alcune osservazioni:

- per un campo di spostamenti rigido:

$$\underline{e}_j = 0 \Rightarrow \delta L_i = 0 \Rightarrow \delta L_e = \delta L_{fatto} + \delta L_{freto} = 0$$

- vale la circolarità:



- se ci si accontenta di imporre condizioni in media, non puntuali (ma sul volume), l'ILV può essere usata al posto delle equazioni di equilibrio e di congruenza. La forza ma è in bel caso debole.

Interpretazione meccanica di $\underline{t}$ e forma tensoriale di ILV

Possiamo interpretare meccanicamente il lavoro virtuale interno. Vettorialmente e indicialmente:

$$\delta L_i = \sum_{j=1}^3 \int_V \underline{b}_j \cdot \underline{e}_j \, dV = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \int_V G_{ij} \, \underline{E}_{ij} \, dV$$

Infatti $\underline{b}_j = \sum_{i=1}^3 G_{ij} \underline{a}_i$ e $\underline{e}_j = \sum_{i=1}^3 \underline{E}_{ij} \underline{a}_i$. Ogni componente di

tensione fa lavoro nella deformazione!

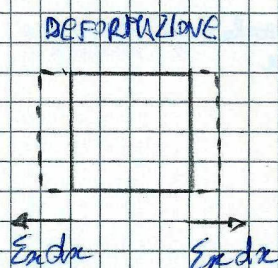
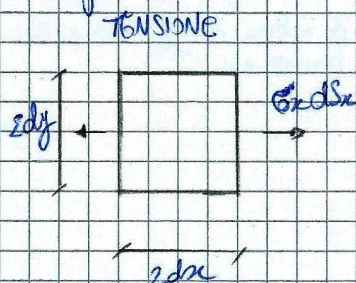
$$+ \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{21} \epsilon_{21} + \dots$$

Usando la notazione ingegneristica:

$$SL = \int_V (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV$$

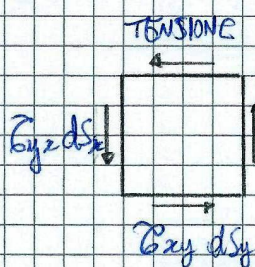
Se prendiamo un quadrato:

- allungamento:



$$SL = 2 \sigma_{xx} dx \cdot \epsilon_{xx} dx$$

- rotazione



$$SL = \tau_{yx} dx \cdot \gamma_{yx} dx$$

Il seguente integrale, in forma operatoriale, è analogo a quello della brace:

$$SL = \int_V \underline{\sigma}^T \underline{\epsilon} dV \quad \underline{\sigma} := \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \underline{\epsilon} := \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

L'identità dei lavori virtuali è:

$$\int_V \underline{b}^T \underline{u} dV + \int_{S_f} \underline{f}^T \underline{u} dS + \int_{S_u} \underline{r}^T \underline{u} dS = \int_V \underline{\sigma}^T \underline{\epsilon} dV$$

Il dominio Ω (di volume V e superficie $S_u \cup S_f$) deve essere compatto nelle tre dimensioni (per la brace deve essere compatto su $[0, l]$).

Riassunto della dualità

Rivediamo in simboli la dualità dei due problemi:

CINETICO

$$D \underline{w} = \underline{F} \text{ in } V$$

$$\underline{w} = \underline{u} \text{ su } S_u$$

$$S^* \underline{F} = 0$$

S operatore differenziabile
lineare del n -ordine

STATICO

$$D^* \underline{G} = \underline{b} \text{ in } V$$

$$N \underline{G} = \underline{f} \text{ su } S_f$$

$$\underline{G} = \underline{G}_0 + S \underline{X}$$

$\underline{X}$ vettore di funzione di
tensione